Polynômes

IUT Villetaneuse

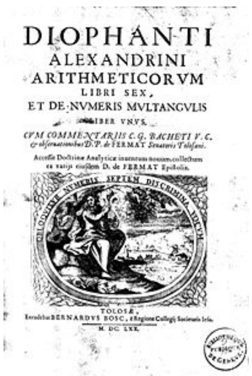
Département Informatique

18 octobre 2012

Chapitre 1

Historique

1.1 L'antiquité


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

L'histoire des polynômes se confond avec celle de l'algèbre et celle de la résolution d'équations.
Première apparition des polynômes chez **DIOPHANTE** d'Alexandrie où les inconnues sont notées par une lettre.

1.2 Les mathématiciens arabes

Naissance de l'algèbre ("al-jabr"), au 13ème siècle, grace aux travaux de **AL KHAWARIZMI** et de Omar **KHAYYAM**.
Résolution de 6 types d'équations du second degré.
Les opérations s'étendent aux inconnues et les polynomes de degré n sont représentés par la suite de leurs coefficients.

1.3 Le moyen-age en Italie

Résolution de l'équation du troisième degré par Nicolo Fontana, dit **TARTAGLIA** (1500-1557), et Gerolamo **CARDAN** (1501-1576), puis de celle du quatrième degré par Ludivico **FERRARI** (1522-1565).
Dans le même temps, introduction des nombres complexes par Raphaël **BOMBELLI**, en liaison avec l'équation du troisième degré.

1.4 En France

Développement du calcul litteral par **VIETE** (1540-1603).
Evariste **GALOIS** (1811-1832) prouve qu'on ne peut pas résoudre par radicaux les équations de degré 5 et plus.

Chapitre 2

Polynômes

2.1 Fonction polynôme

DÉFINITION 2.1.1
- *Soit les* $n+1$ *réels* a_0, a_1, ... $a_n \neq 0$
- *La fonction* f *de la variable réelle* x, *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f : x \to a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

  est une ***fonction polynôme*** *de degré* n
- *Les réels* a_k *sont les coefficients réels de* P
- *On note également* $deg(P) = n$
- *Le terme* $a_k x^k$ *est le* ***monôme*** *de degré* k *du polynôme* P
- *Si* $a_n = 1$, *on dit que le polynôme est* ***unitaire***.

EXEMPLES :

1. $P(x) = 3x^3 - 15x^2 + 10x + 2$ est un polynôme de degré 3
2. $P(x) = 1 + 2x - 3x^2$ est un polynôme de degré 2, ordonné suivant les puissances croissantes.
3. Tout nombre réel non nul est un polynôme de degré 0.

REMARQUES :
- On définit plus généralement de manière formelle un **polynôme** comme étant un $(n+1)-$*uplet* de réels $(a_n, \ldots a_1, a_0)$, avec $a_n \neq 0$
- L'indéterminée, ou la variable est notée X. Ce peut être un nombre réel comme défini précédemment, mais également une fonction, une suite, une matrice, etc...
- On noté également le polynôme p avec le symbole de sommation : $p(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$
- Tout polynôme est une somme finie de monômes.
- Les coefficients du polynôme ne sont pas nécéssairement dans $\mathbb{R}$: systèmes de numération.
- On peut toujours se ramener à un polynôme unitaire en divisant tous les coefficients par a_n

2.2 Propriétés

2.2.1 Polynôme nul

DÉFINITION 2.2.1
Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

$$P = 0 \iff \forall k \in \{0, \ldots, n\} : a_k = 0$$

2.2.2 Polynômes égaux

THÉORÈME 2.2.1
Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

$$P = Q \iff \forall k \in \{0, \ldots, n\} : a_k = b_k$$

2.2.3 Opérations

Pour tous polynômes P et Q et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
- $P + Q$ est obtenu en additionnant les coefficients des monômes de même degré.
- $\forall \lambda \neq 0 : \lambda P$ est obtenu en multipliant tous les coefficients par λ
- PQ est obtenu en utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition.

2.2.4 Degrés

Pour tous polynômes P et Q :
- $deg(P + Q) \leq max\{deg(P), deg(Q)\}$
- Si $\lambda \neq 0$, $deg(\lambda P) = deg(P)$
- $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$

2.3 Racines d'un polynôme

2.3.1 Définitions

DÉFINITION 2.3.1
*Le nombre réel a est **racine** de P si et seulement si $P(a) = 0$*

EXEMPLES :

1. $a = 1$ est racine de $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 2x - 1$
2. Déterminer b pour que 2 soit racine de $P(x) = x^2 - 7x + b$.

2.3.2 Identité remarquable

THÉORÈME 2.3.1
Pour tout n entier supérieur ou égal 1 :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

EXEMPLES :

1. Pour $n = 2$, on obtient $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
2. Pour $n = 3$, on obtient $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$
3. $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

2.3.3 Divisibilité par $x - a$

Théorème 2.3.2
Le nombre réel a est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que :

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

avec $deg(Q) = deg(P) - 1$

Exemples :
- Le nombre réel 2 est racine du polynôme $x^2 + 4x - 12$, donc il se factorise en : $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(ax + b)$
- Le polynôme $p(x) = x^2 + 1$ n'admet pas de racines.

Théorème 2.3.3
Les nombres réels a_1, a_2, ... a_k sont racines de P, si et seulement si il existe un polynôme Q de degré $n - k$ tel que :

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_k)Q(x)$$

Conséquence : Tout polynôme de degré n admet au plus n racines dans $\mathbb{R}$

2.3.4 Cas des polynômes de degré 2

Théorème 2.3.4
Soit le polynôme de degré 2, ou trinôme $t(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On appelle $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de ce trinôme.
- **Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et se factorise en $t(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$**
- **Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine réelle $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et se factorise en $t(x) = a(x - x_0)^2$**
- **Si $\Delta < 0$, le trinôme n'admet pas de racine réelle et n'est pas factorisable en produit de polynômes de degré 1.**

Exemples :
- Trouver les racines de $t_1(x) = 6x^2 - 7x - 5$
- Trouver les racines de $t_2(x) = 4x^2 - 12x + 9$

Chapitre 3

Schéma de Horner

3.1 Introduction

William George HORNER (1819-1845) est un mathématicien britannique, connu pour sa méthode, déjà publiée par **Zhu Shijie** vers 1300, mais aussi utilisée par **Isaac Newton** 150 ans avant lui, qui permet :
- de calculer la valeur d'un polynôme en un point.
- de factoriser ce polynôme.
- de chercher la valeur approchée d'une racine d'un polynôme.
- d'exprimer un polynôme par un changement de variable.
- de calculer les valeurs des dérivées successives d'un polynôme.

L'algorithme de Horner est publié parallèlement par **Paolo Ruffini** et est utilisée par **De Morgan** et **Young**.

3.2 Premier polynôme

3.2.1 Factorisation

On considère le polynôme :

$$P(x) = x^3 - 8x^2 - 15x + 54$$

1. Calculer $P(4)$, $P(-5)$ et $P(2)$
2. Justifier l'existence d'un polynôme Q tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$
3. Quel est le degré de Q ?
4. En posant $Q(x) = ax^2 + bx + c$, calculer les réels a, b et c
5. Résoudre l'équation $P(x) = 0$

3.2.2 Division euclidienne

1. Effectuer la multiplication $(x-2)Q(x)$
2. Pour tout $x \neq 2$, on peut donc écrire : $Q(x) = \dfrac{P(x)}{x-2}$. Effectuer cette division.

3.2.3 Autre écriture de P

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = ((1x - 8)x - 15)x + 54$$

Si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on veut calculer $P(\alpha)$, on doit donc, avec cette nouvelle expression de P, calculer successivement les valeurs de trois polynomes de la forme $mx + p$.

Disposition pratique :

	1	-8	-15	54
$x = 4$				

	1	-8	-15	54
$x = -5$				

	1	-8	-15	54
$x = 2$				

3.3 Avec une fraction rationnelle

On considère la fonction numérique f, définie pour tout $x \neq -5$ par :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 80x - 96}{x + 5}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
2. Déterminer les trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -5$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 5}$$

3.4 Autres exemples

Appliquer la méthode pour factoriser les polynômes suivants :

1. $x^4 + 4x^3 - 81x^2 - 16x + 308$
2. $3x^5 - 6x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x - 4$
3. $2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$
4. $3x^4 - x^2 - 16x - 14$
5. $x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1$

Chapitre 4

Formule de Cardan

4.1 Une bien belle histoire...

D'abord, ces quelques lignes (issues du livre "Mathématiciens de A à Z") :

Niccolo Fontana "Tartaglia" est issu d'une famille pauvre. Lors de la prise de Brescia par les français en 1512, il se réfugie avec son père dans la cathédrale pour échapper aux envahisseurs. Rien n'y fait , les soldats de Louis XII pénètrent dans le lieu sacré, massacrent son père, et Niccolo est laissé pour mort, avec une fracture du crane et un coup de sabre à travers la machoire et le palais. Sa mère le retrouve dans cet état, mais encore vivant. Comme elle n'a rien pour le soigner, elle lèche les plaies de son fils et lui sauve la vie. Cependant, la blessure au palais lui laisse un défaut de parole qu'il conserve toute sa vie, ce qui lui vaut son surnom ("tartagliare" signifie bégayer en italien). Sa mère économise pour permettre à son fils de suivre l'école ... pendant 15 jours. Le jeune Niccolo vole alors des livres et des cahiers pour continuer à apprendre en autodidacte. Devenu adulte, il gagne sa vie en enseignant les mathématiques dans différentes villes d'Italie et en participant à des concours.

En 1535, on lui propose 30 équations du troisième degré du type

$$x^3 + px = q$$

Les résolutions ne se font à l'époque qu'à tatons. Dans la nuit du 12 au 13 février, juste avant la date limite, il trouve la résolution générale et résout les trente équations en quelques heures. Dans l'espoir de gagner d'autres concours, tartaglia ne dévoile pas sa formule. Cardan, mis au courant de ce succès, fait venir Tartaglia à Milan et le persuade de lui révéler sa méthode, promettant de ne jamais la dévoiler, et à fortiori de la publier. Celui-ci cède. Cardan trouve alors la solution générale de toutes les équations du troisième degré et, apprenant que Scipione del Ferro a donné la solution avant Tartaglia, se sent délié de sa promesse et publie le résultat dans "Ars magna" en 1545. La formule générale porte aujourd'hui le nom de formule de Cardan.

4.2 La formule de CARDAN

On considère l'équation $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$

1. Montrer que cette équation se ramène à l'équation $x^3 + px + q = 0$ en posant $x = X + \alpha$ et en choisissant convenablement α.
2. Application à l'équation $X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = 0$
3. Montrer que si u et v sont tels que $x^3 + px + q = x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3)$, alors u^3 et v^3 sont racines d'une équation du second degré à déterminer.
4. Application à l'équation $X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = 0$
5. Vérifier que $x - u - v$ divise $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3)$ et en déduire un procédé de résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.
6. Déterminer les solutions de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = 0$
7. Tester la méthode avec l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$
8. Tester la méthode avec l'équation $X^3 - 4X^2 + X + 6 = 0$

Chapitre 5

Exercices

Exercice 1

Factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes :

1. $x^6 - 1$
2. $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12$
3. $x^8 + x^4 + 1$
4. $x^3 + 1$
5. $x^4 - 3x^2 + 4$
6. $x^3 - x^2 + 4x - 4$
7. $x^3 - 5x^2 + 6x$

Exercice 2

Soit le polynôme : $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$
1. Montrer que -1 et 1 sont des racines de P
2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3

On donne les polynômes $A(x) = x^4 + x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$. Trouver deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$
2. $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$
3. $x^4 - x^2 - 12 \leq 0$
4. $\dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 3} \geq 1$
5. $\sqrt{2 - x} = 2x - 1$
6. $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = x - 1$

Exercice 5

Décomposer en éléments simples les fractions :

1. $\dfrac{1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$
2. $\dfrac{2x^4 - x^3 + 9x^2 - 6x + 1}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$
3. $\dfrac{x^6 - 9x^2 - 3}{x^4 - 3x^2 - 4}$
4. $\dfrac{x^4 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$
5. $\dfrac{2x^4 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$
6. $\dfrac{x^5 + x^4 + x + 1}{x^5 - 2x^3 + x}$

Exercice 6

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^4 + 4x^3 + 24x^2 + 40x + 100$

1. Montrer que P est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.
2. En déduire une primitive de : $F(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 12x + 10}{P(x)}$

<u>Exercice 7</u>

Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$

1. Montrer que si $a \in \mathbb{Z}$ est racine de P, alors il divise le terme constant de P
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Application : factoriser $P(x) = x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24$

<u>Exercice 8</u> *Somme et produit d'une équation du second degré*

Soit a un réel quelconque. Sans calculer de discriminant, pourquoi l'équation $x^2 + ax - 1 = 0$ possède-t-elle deux solutions distinctes x_1 et x_2 ? **Sans calculer ces solutions**, exprimer en fonction de a :

1. $(x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2)$
2. $x_1^2 + x_2^2$
3. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

<u>Exercice 9</u> *Triangle rectangle*

Déterminer les côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est égale à 35 et le périmètre égal à 84.

<u>Exercice 10</u>

Déterminer les coordonnées des points d'intersection, s'ils existent de :

1. la courbe d'équation : $y = x^3$ et de la droite : $y = -x + 2$.
2. la parabole $\mathcal{P} : y = x^2 + x - 2$ et de l'hyperbole $\mathcal{H} : y = \dfrac{1}{x}$

<u>Exercice 11</u> *Vrai ou faux ?*

1. La somme de deux polynômes de degré trois est encore un polynôme de degré 3.
2. Si un polynôme est de degré trois, son carré est de degré 9.
3. Tout polynôme à coefficients réels admet au moins une racine.
4. Si un polynôme n'admet pas de racine réelle, alors il n'est pas factorisable.
5. Si P et Q prennent la même valeur en a, alors $P - Q$ admet une racine réelle.
6. Deux polynômes qui admettent les mêmes racines sont égaux.
7. Un polynôme qui s'annule pour 1, 2, 3, 4 et 5 est de degré 5.
8. Si elles existent, les racines de $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$ sont en nombre pair
9. Le polynôme $P(x) = x^4 + 1$ n'admet pas de racines donc n'est pas factorisable.

<u>Exercice 12</u> *Equations et problèmes de Bhaskara*

1. Quel est, homme savant, le nombre qui multiplié par 12 et ajouté au cube du nombre est égal à six fois le carré augmenté de 35 ?
2. Si tu es versé dans les opérations de l'algèbre, dis le nombre dont le bicarré moins le double de la somme du carré et deux cent fois le nombre est égal à la myriade (10.000) moins 1 ? Mettre l'équation sous la forme $x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000$ et chercher les réels positifs solutions.
3. Résoudre l'équation $(x^2\breve{}3x\breve{}2)^2\breve{}3(x^2\breve{}3x\breve{}2)\breve{}2\breve{}x = 0$, poser $X = x^2\breve{}3x\breve{}2$
4. Déterminer x pour que la somme des volumes des trois cubes de côtés x, $x + 1$ et $x + 2$ soit égale au volume du cube de côté $x + 3$